EXERCICE N°1 : 40' 6 points

Soit la fonction f définie sur]0 , 3] par $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur]0 , 3[et que pour tout $x \in]0 , 3[$, $f'(x) = \dfrac{9}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f réalise une bijection de]0 , 3] sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que l'équation f(x) = - x admet dans]0 , 3] une solution unique α et que $1,2 < \alpha < 1,3$.

3) a) Déterminer l'intersection de ζ_f avec l'axe des abscisses.

b) Tracer dans un même repère ON ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$. f^{-1} est – elle dérivable en 1 ?

5) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

6) On considère la fonction h définie sur [0 , π/2[par $h(x) = f(3\cos x)$.

a) Montrer que pour tout x de [0 , π/2[, $h(x) = 1 - \tan x$.

b) Montrer que h est une bijection de [0 , π/2[sur]-∞ , 1].

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur]-∞ , 1] et déterminer $\left(h^{-1}\right)'$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x - 2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le dernier résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f. Tracer ζ_f.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $f'(x) \leq \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$.

b) En déduire que l'équation f(x) = x admet dans [1 , +∞[une solution unique α et que $\alpha \in]1,2[$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur]0,2[.

b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ dans chacun des intervalles]0,1] et]1,2[.

c) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f.

EXERCICE N°3 : 35' 5 points

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ et ζ_f sa courbe dans un R ON.

1) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que A(0 , 2) est un centre de symétrie de ζ_f.

2) Etudier les variations de f sur]0 , 1] et construire ζ_f.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle I =]0 , 1]. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) a) Etudier les variations de f' sur]0 , 1[. En déduire que $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans]0 , 1] et que $\alpha \in]½ , ¾[$.

5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que : $\forall x \in J;\ 0 \leq \left(g^{-1}\right)'(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

6) Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 \in]-\infty , 2] \\ u_{n+1} = g^{-1}(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq 2$ puis $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$. Déduire que u cv et préciser sa limite.